Тема 1 Комплексные числа.

<u>*Определение*</u>

<u>*Комплексным числом*</u> называется число вида $a+bi$. Где a и b – *действительные числа*, а i – *мнимая единица, т.е.* $i^2=-1$.

Число a называется *действительно частью комплексного числа* , а b – *мнимой частью* комплексного числа $a+bi$.

<u>*Определение*</u>

Два комплексных числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряжёнными* комплексными числами.

1. Действительное число a может быть также записано в форме комплексного числа: $a+0i$ или $a-0i$. Например, записи $5+0i$ и $5-0i$ означают одно и то же число 5.

2. Комплексное число $0+bi$ называется *чисто мнимым числом*. Запись bi означает то же самое, что и $0+bi$.

3. Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ считаются равными, если $a=c$ и $b=d$. В противном случае комплексные числа не равны.

Операции над комплексными числами

Сложение. Суммой комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(a+c)+(b+d)i$. Таким образом, *при сложении комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части*.

Это определение соответствует правилам действий с обычными многочленами.

Вычитание. Разностью двух комплексных чисел $a+bi$ (уменьшаемое) и $c+di$ (вычитаемое) называется комплексное число $(a-c)+(b-d)i$.

Таким образом, *при вычитании двух комплексных чисел отдельно вычитаются их действительные и мнимые части*.

Умножение. Произведением комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число:

$(ac-bd)+(ad+bc)i$. Это определение вытекает из двух требований:

1) числа $a+bi$ и $c+di$ должны перемножаться, как алгебраические двучлены,
2) число i обладает основным свойством: $i^2=-1$.

$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$.

Следовательно, *произведение двух сопряжённых комплексных чисел равно действительному положительному числу.*

Деление. Разделить комплексное число $a+bi$ (делимое) на другое $c+di$ (делитель) - значит найти третье число $e+f\,i$ (чатное), которое будучи умноженным на делитель $c+di$, даёт в результате делимое $a+bi$.

Если делитель не равен нулю, деление всегда возможно.

П р и м е р . Найти $(8 + i) : (2 - 3i)$.

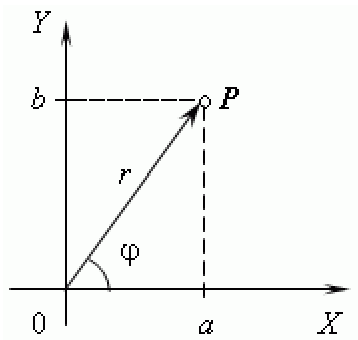
Р е ш е н и е . Перепишем это отношение в виде дроби: $\dfrac{8+i}{2-3i}$.

Умножив её числитель и знаменатель на $2 + 3i$
и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{13+26i}{13} = 1+2i.$$

Геометрическое представление комплексных чисел.

Комплексные числа изображаются точками на координатной плоскости. Выберем для этого прямоугольные (декартовы) координаты с одинаковыми масштабами на обеих осях. Тогда комплексное число $a+bi$ будет представлено точкой P *с абсциссой* a *и ординатой* b (см. рис.). Эта система координат называется ***комплексной плоскостью***.



Модулем комплексного числа называется длина вектора OP, изображающего комплексное число на координатной (*комплексной*) плоскости. Модуль комплексного числа $a+bi$ обозначается $|a+bi|$ или буквой r и равен:

$$r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль.

Аргумент *комплексного числа* - это угол φ между осью OX и вектором $\overrightarrow{OP}$, изображающим это комплексное число. Отсюда, $\operatorname{tg}\varphi = b / a$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Абсциссу a и ординату b комплексного числа $a + bi$ можно выразить через его модуль r и аргумент φ

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Тогда

$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Операции с комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.

1. $z_1 \cdot z_2 = [r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] [r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] =$

$$= r_1 \cdot r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] .$$

2. $z_1 / z_2 = [r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] / [r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] =$

$$= r_1 / r_2 [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)] .$$

3. $z^n = [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$

Это знаменитая *формула Муавра.*

4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \; \{ \cos [(\varphi + 2\pi k) / n] + i \sin [(\varphi + 2\pi k) / n] \}.$

Здесь k - целое. Чтобы получить n различных значений корня n-ой степени из z необходимо задать n последовательных значений для k (например, $k = 0, 1, 2,\ldots, n - 1$) .

Вопросы для самопроверки

1. Что такое число i?
2. Как комплексное число представляют геометрически?
3. Назовите формы записи комплексного числа.
4. Что такое модуль комплексного числа и как его находят?
5. Что такое аргумент комплексного числа и как его находят?
6. Как выполняют сложение комплексных чисел?
7. Как выполняют вычитание комплексных чисел?
8. Как выполняют умножение комплексных чисел?
9. Как выполняют деление комплексных чисел?
10. Как выполняют возведение комплексного числа в степень?
11. Как извлекают корень из комплексного числа?