Тема 1. Основы теории комплексных чисел

Комплексные числа и их применение

Определение

Комплексное число - это число вида a+bi, где a и b – вещественные числа. z=a+bi

- При этом число a называется *действительной частью* числа z
- ($a = Re\ z$), а b - *мнимой частью* ($b = Im\ z$).

- Если $a=Re\ z=0$, то число *z* будет *чисто мнимым*, если $b=Im\ z=0$, то число z будет *действительным*.

Числа $z=a+ib$ *и* $z_1=a\text{-}ib$ называются *комплексно – сопряженными.*

- Два комплексных числа $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2$ называются *равными*, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

- $a_1=a_2;\qquad b_1=b_2$

- Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части

- $a=b=0.$

- Также комплексные числа можно записывать, например, в виде $z=x+iy$, $z=u+iv$.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z{=}x{+}iy$ можно изобразить точкой $M(x;y)$ плоскости xOy такой, что $x = Re\ z,\ y = Im\ z$. И, наоборот, каждую точку $M(x;y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z{=}x{+}iy$ (рисунок 1).

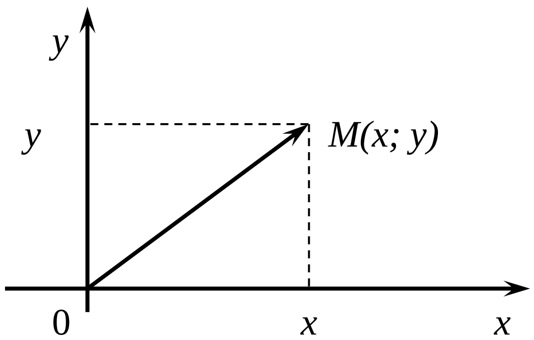

Рисунок 1

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Ось абсцисс называется *действительной осью*, так как на ней лежат действительные числа $z{=}x{+}0i{=}x$.

Ось ординат называется *мнимой осью*, на ней лежат мнимые комплексные числа $z{=}0{+}yi{=}yi$.

содержание

Формы записи комплексных чисел

Запись числа в виде $z=x+iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Из рисунка 1 видно, что $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, следовательно, комплексное $z=x+iy$ число можно записать в виде:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма записи называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа.

Модуль $r=|z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргумент φ определяется из формул

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}; \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Запись комплексного числа

$z=a+bi$ – алгебраическая форма

$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма

$z=e^{i\varphi}$ - показательная форма

п.5 Действия над комплексными числами

1) Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

а) Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Свойства операции сложения:

1. $z_1+z_2= z_2+z_1$,
2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$,
3. $z+0=z$.

б) Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

Разностью двух комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется такое комплексное число z, которое, будучи сложенным с z_2, дает число z_1 и определяется равенством

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

содержание

в) Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z=z_1 z_2=(x_1 x_2-y_1 y_2)+i(x_1 y_2-x_2 y_1).$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$i^2=-1.$$

Свойства операции умножения:

1. $z_1z_2=z_2z_1,$
2. $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),$
3. $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3,$
4. $z\cdot 1=z.$

г) Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению.

Частным двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое будучи умноженным на z_2, дает число z_1, т.е.

если $z_2 z = z_1$. $\dfrac{z_1}{z_2} = z,$

Если положить $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i \neq 0$, $z = x + yi$, то из равенства $(x+yi)(x_2+iy_2) = x_1 + y_1 i$, следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y:

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

На практике вместо полученной формулы используют следующий прием: умножают числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример 2. Даны комплексные числа $10+8i$, $1+i$. Найдем их сумму, разность, произведение и частное.

Решение.

а) $(10+8i)+(1+i)=(10+1)+(8+1)i=11+9i;$

б) $(10+8i)–(1+i) =(10–1)+(8–1)i=9+7i;$

в) $(10+8i)(1+i) =10+10i+8i+8i^2=2+18i;$

г) $\dfrac{10+8i}{1+i}=\dfrac{(10+8i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{10-10i+8i-8i^2}{1-i^2}=\dfrac{18-2i}{2}=9-i.$

Примеры решения заданий с комплексными числами

Пример 1

Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$,

$z_2 = 5 – 7i$.

Найти: а) $z_1 + z_2$;

б) $z_1 – z_2$;

в) z_1z_2.

Решение:

а) $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 – 7i) = 2 + 3i + 5 – 7i =$

$(2 + 5) + (3i – 7i) = 7 – 4i;$

б) $z_1 – z_2 = (2 + 3i) – (5 – 7i) = 2 + 3i – 5 + 7i =$

$(2 – 5) + (3i + 7i) = – 3 + 10i$

в) $z_1z_2 = (2 + 3i)(5 – 7i) = 10 – 17i + 15i – 21i2=$

$10 –14i + 15i + 21 =$

$(10+21)+(– 14i+15i)=31+i$.

(Здесь учтено, что $i^2 = – 1$).

__Пример 4__

Даны комплексные числа $z_1 = 4 + 5i$ и $z_2 = 3 + 4i$.

Найти частное.

__Решение:__

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2\overline{z_1}}{z_1\overline{z_1}} = \frac{4\cdot 3+5\cdot 4}{16+25} + \frac{4\cdot 4-3\cdot 5}{16+25}i = \frac{32}{41} + \frac{1}{41}i.$$

2) Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Рассмотрим два комплексных числа z_1 и z_2, заданных в тригонометрической форме

$$z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z_2 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

а) Произведение комплексных чисел

Выполняя умножение чисел z_1 и z_2, получаем

$$z_1 \cdot z_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho(\cos\psi + i\sin\psi) =$$

$$= r\rho(\cos\varphi\cos\psi + i\cos\varphi\sin\psi + i\sin\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) =$$

$$= r\rho((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)),$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = r\rho(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))}$$

б) Частное двух комплексных чисел

Пусть заданы комплексные числа z_1 и $z_2 \neq 0.$

Рассмотрим частное $\dfrac{z_1}{z_2}$, имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\rho(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\rho)}{\rho(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\psi - i\sin\psi)} =$$

$$= \frac{r}{\rho}\left(\frac{(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\varphi)}{\cos^2\psi + \sin^2\psi}\right),$$

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{\rho}\left(cos(\varphi - \psi) + i\,sin(\varphi - \psi)\right)}$$

содержание

Пример 5. Даны два комплексных числа $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Найдите $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$.

Решение.

1) Используя формулу $z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2)\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$,
получаем

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Следовательно, $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$.

2) Используя формулу $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$,
получаем

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Следовательно, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

Ответ: $z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

в) Возведение комплексного числа, заданного в тригонометрической форме в n-ю степень

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

В общем случае получим:

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (2)$$

где n– целое положительное число.

Следовательно, *при возведении комплексного числа в степень модуль возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени*.

Выражение (2) называется *формулой Муавра*.

Пример 6. Найти формулы $sin2\varphi$ и $cos2\varphi$.

Решение.

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.

Приравнивая, получим

$$\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi.$$

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Получили известные формулы двойного угла.

содержание

г) Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа

Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее равенству $w^n = z$, т.е. $\sqrt[n]{z} = w$, если $w^n = z$.

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = w^n = [\rho(\cos\psi + i\sin\psi)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда имеем $\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in Z.$

То есть $\rho = \sqrt[n]{r}, \ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}.$

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = w$ принимает вид

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

где $k = \overline{0,\ n-1}$ (т.е. от 0 до n-1).

содержание

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение комплексного числа.
2. Какое комплексное число называется чисто мнимым?
3. Какие два комплексных числа называются сопряженными?
4. Объясните, что значит сложить комплексные числа, заданные в алгебраической форме; умножить комплексное число на действительное.
5. Объясните принцип деления комплексных чисел, заданных в алгебраической форме.
6. Запишите в общем виде целые степени мнимой единицы.
7. Что означает возведение комплексного числа, заданного алгебраической формой в степень (n- натуральное число)?
8. Расскажите как изображаются комплексные числа на плоскости.